الأستاذ بن شعبانة عبد الحكيم
مجموعة ابن البناء المراكشي

مبرهنة كنتور

من أجل كل مجموعتين غير خاليتين

A , B

إذا وجد تباين من الأولى نحو الثانية و وجد تباين من الثانية نحو الأولى **فيوجد تطبيق تقابلي بينهما**

سميت هذه المبرهنة بمبرهنة كنتور برنشتاين ذلك أن كنتور أعطى برهانا يستعمل مسلمة الاختيار ثم قام برنشتاين بإعطاء برهان آخر لا يستعملها.

سنقدم ثلاث براهين مختلفة لهذه المبرهنة

البرهان الأول

عن طريق التوطئة التالية:

توطئة

لنعتبر مجموعة E ومجموعة أجزائها ولنفرض أنه لدينا تطبيق g من مجموعة الأجزاء نحو نفسها بحيث هذا التطبيق متزايد:

$$g : P(E) \rightarrow P(E)$$

التطبيق المتزايد بمفهوم المجموعات هو التطبيق الذي يحقق

$$A \subset B \Rightarrow g(A) \subset g(B)$$

إذا حقق التطبيق ذلك **فهو يقبل نقطة صامدة** أي توجد مجموعة بحيث

$$g(M) = M$$

برهان التوطئة
لنعرف المجموعة التالية

$$X = \{A \in P(E) : A \subset g(A)\}$$

بما أن المجموعة الخالية تحقق

$$\varnothing \subset g(\varnothing)$$

فهي تنتمي ل X إذن X غير خالية.

لنصنع اتحاد مجموعات X فنضع

$$C = \bigcup M \text{ , } M \in X$$

بما أن

$$\forall M \in X : M \subset g(M)$$

فنستنتج أن

$$\bigcup M \subset \bigcup g(M) \quad \ldots (1)$$

لكن كون g متزايدة نستنتج منه أن

$$M \subset C \Rightarrow g(M) \subset g(C)$$

ومنه

$$\bigcup g(M) \subset g(C) \ldots (2)$$

من 1 و 2 نستنتج

$$C \subset g(C) \ldots (3)$$

إذن C تنتمي ل X

نطبق كون g متزايدة فيكون لدينا

$$C \subset g(C) \Rightarrow g(C) \subset g(g(C))$$

لكن هذا يعني أنه

$$g(C) \in X$$

إذن هي محتوات في C لأنها اتحاد مجموعات X

$$g(C) \subset C \ldots (4)$$

إذن من 3 و 4 نجد نقطتنا الصامدة

$$g(C) = C$$

برهان مبرهنة كنتور - برنشتاين

لنفرض أنه لدينا تباين f من A نحو B وتباين h من B نحو A.

نحن نعلم أن f يصبح تقابلي إذا جعلناه من A نحو f(A)

وعموما يصبح تقابلي من مجموعة E نحو f(E)

ونفس الشيء يقال على h

الفكرة هي أن نقصر f على مجموعة E بحيث تتمة E في A أي A\E هي صورة كذلك للجزء المتمم من B بواسطة h أي

$$h(B \setminus f(E)) = A \setminus E$$

عندها يكون f تقابلي من E نحو صورة E و h تقابلي من تتمة صورة E ب f نحو تتمة E في A.

فيمكننا أن نعرف تطبيق تقابلي k كالتالي:

$$k(x) = f(x) , x \in E$$

$$k(x) = h^{-1}(x) : x \in A \setminus E$$

إذن نحتاج أن يكون h تقابلا بين **B\f(E)** و **A\E** حتى نستطيع استعمال h^-1

أي نحتاج

$$h(B \setminus f(E)) = A \setminus E$$

كي نكمل به ما تبقي من الصور التي لا يغطيها f.

المساواة السابقة تعني أن

$$A \setminus h(B \setminus f(E)) = E$$

لكن هذا يعرف تطبيق على مجموعات أجزاء المجموعة A أي من أجل كل مجموعة M لدينا

$$g(M) = A \setminus h(B \setminus f(M))$$

وهذا التطبيق بتعريفه متزايد فهو يقبل نقطة صامدة إذن توجد مجموعة E يحقق عندها g(E) = E أي

$$A \setminus h(B \setminus f(E)) = E$$

وهو المطلوب لكي نعرف التطبيق التقابلي k.

البرهان الثاني

سنبدأ أولا بهذه التوطئة

توطئة

إذا وجد تباين من مجموعة نحو جزء منها فيوجد بينهما تقابل.

لتكن مجموعة A وتباين u نحو جزء منها B

ولنأخذ متتالية المجموعات المعرفة بالتراجع التالية

$$C(0) = A \setminus B$$
$$C(n) = U(C(n-1)) , n > 0$$

وليكن C اتحادها، نلاحظ من تعريف C أن

$$u(C) \subset C$$

نعرف الآن التطبيق v بأنه مطابق ل u على C وحيادي على متممة C أي :

$$v(x) = u(x) : x \in C$$
$$v(x) = x : c \notin C$$

هذا التطبيق ينقل القيم من A نحو B لأن القسم الأول من تعريفه معرف ب u الذي صوره في B.

والقسم الثاني ينقل x لا تنتمي ل C نحو x لكن كون x لا تنتمي ل C يعنى أنها لا تنتمي ل C(0) لأن C هي اتحادات Cn و بما أن **C(0) = A\B** فهذا يعني أن x لا تنتمي ل A\B أي تنتمي ل B.

التطبيق v متباين من تعريفه ذلك أن القسم الأول

$$v(x) = u(x) : x \in C$$

متباين لتباين u

والقسم الثاني كذلك

$$v(x) = x : c \notin C$$

وهما قسمان لا يلتقيان لأن $v(C) = u(C) \subset C$

سنبرهن الآن أنه غمر من A نحو B

ليكن y من B فإذا كان لا ينتمي ل C فلدينا

$$v(y) = y$$

أما إذا كان ينتمي ل C فهو ينتمي لأحد مجموعات اتحادها أي C(n) لكنه لا ينتمي ل C(0) لأن مجموعة وصولنا هي B و C(0) هي A\B

إذن سنتمي لأحد مجموعات الاتحاد الأخرى

$$C(n) = u(C(n-1))، n > 0$$

ومنه يوجد x في C(n-1) بحيث

$$v(x) = u(x) = y$$

إذن تطبيقنا غامر ومتباين فهو تقابل من A نحو B.

برهان مبرهنة كانتور برنشتاين

إذا كان عندنا تباين f من E نحو F وتباين g من f نحو E فنحن نعلم أن g تقابل بين F و g(F) ولدينا

$$u = gof$$

تباين من E نحو g(F)

ومنه حسب التوطئة يوجد تقابل h بين E و g(F) وبما أن g هو تقابل بين F و g(F) فقد برهنا المطلوب بالتطبيق:

$$goh^{-1}$$

البرهان الثالث

هذا البرهان مستوحى من برهان

Julius König 1906

لتكن المجموعتين غير الخاليتين E و F والذي بينهما تطبيقان متباينيان

$f : E \to F$
$g : F \to E$

سنعرف من أجل x من E السلسلة المكونة من متتالية من عناصر من المجموعتين.

سنضع

$$x_0 = x$$

إن وجدت صورة عكسية ل x_0 بواسطة g سنضع

$$x_1 = g^{-1}(x_0)$$

إن وجدت صورة عكسية ل x_1 بواسطة f سنضع

$$x_2 = f^{-1}(x_1)$$

ونواصل هكذا فتكون عندنا ثلاث حالات:

إما أننا نواصل للمالانهاية فنرمز للقسم من E الذي يحقق ذلك أي مجموعة القيم x من E التي لها سلسلة غير منتهية

$$E(\infty)$$

أو نتوقف عند x_n في E ليس لها سابقة ب g فنرمز لهذا الجزء أي مجموعة قيم x من E التي لها سلسلة تتوقف في E ب

$$E(E)$$

أو نتوقف عند x_n من F ليس لها سابقة ب f فنرمز لهذا الجزء أي مجموعة قيم x من E التي لها سلسلة تتوقف في F ب

$$E(F)$$

فنستطيع بذلك تقسيم E إلى ثلاث أقسام منفصلة

نلاحظ أن **$g^{-1}(E(F))$** لا تتقاطع مع **$f(E(\infty))$** و **$f(E(E))$** ذلك أنه لو كانت هناك y مشتركة فستكون سابقتها a من **$E(F)$**

والتي لها متتالية تنتهي ب x_n في F ليس لها سابقة ب f وسابقة b من **$E(\infty)$** أو **$E(E)$**

لكن a و b تشتركان في السلسلة ابتداء من y وهذا تناقض إذ الأولى تنتهي ب xn في F أما الثانية فلا تنتهي أو تنتهي ب xn في E.

نلاحظ كذلك أن جميع عناصر **E(F)** لها سوابق ب g وإلا لكانت تمثل متتالية تقف عند E وهذا يناقض كونها من **E(F)** إذن يمكننا تعريف التطبيق التقابلي من E نحو F

h(x) = f(x)   , x ∈ E(∞) U E(E)
h(x) = g^-1(x) , x ∈ E(F)

كونه متباين واضح من كون f و g^-1 متباينان وصورهما لا تلتقي.

كونه تقابلي نتيجة أن أي عنصر من F إما أن صورته في E بواسطة g هي في متتالية من **E(∞)** أو **E(E)**

ومنه عندها سابقة في E ب f أي يوجد لها f^-1 حسب تعريف المجموعتين إذن سنجدها ب f من **E(∞)** أو **E(E)** وإما هي في **E(F)**

ومنه نجدها ب g^-1 على **E(F)**

وهكذا نكون برهنا على مبرهنة كنتور برنشتاين.